Глава 6. Векторные пространства строк и столбцов.

§1. При решении СЛУ рассм строки длины n.

$A_i = (a_{i1}, a_{i2} \ldots a_{in})$

Делали элем. преобр строк – склад. и умн. на скаляр

Опр. **Векторным простр-м строк длины n** над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) наз мн-во $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), рассматриваемое вместе с операциями сложения векторов и умножение их на скаляр.

$X = (x_1 \ldots x_n)$ $\quad X + Y = (x_1 + y_1) \ldots x_n + y_n)$

$Y = (y_1 \ldots y_n)$ $\quad \lambda X = (\lambda x_1 \ldots \lambda x_n)$

Аналогично можно расм векторное простр-во столбцов.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \lambda Y = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda y_n \end{pmatrix}$$

Линейная комбинация. Линейная оболочка (строк и столбцов)

Пусть $x_1 \ldots x_k$ – строки пр-ва $\mathbb{R}^n$

$\alpha_1 \ldots \alpha_k$ – скаляры

Вектор-строка $\boxed{X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k}$ наз **линейной комбинацией** векторов x_i с коэф. α_i

Например $(2, 3, 5, 5) - 3(1,1,1,1) + 2(1,0,-1,-1) = (1,0,0,0)$
$(1 \ldots \quad) \quad \ldots \quad = (0,0,0,0)$

Пусть $Y = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_k y_k$

Тогда $\alpha X + \beta Y = \alpha(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) + \beta(\beta_1 y_1 + \ldots + \beta_k y_k) =$

$= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) x_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2) x_2 + \ldots + (\alpha\alpha_k + \beta\beta_k) x_k$ –
тоже лин. комб.

$x_1 \ldots x_k$ строки (столбцы)

Пусть V – мн-во всех лин комбинаций $x_1 \ldots x_k$

$V = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k, \ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

Если $x, y \in V$, то $\alpha X + \beta Y \in V$.

Обознач $V = \langle x_1 \ldots x_k \rangle$ и наз **линейной оболочкой** системы $x_1 \ldots x_k$. Также говорят, что V натянуто на $x_1 \ldots x_k$ или порождается $x_1 \ldots x_k$.

Линейная зависимость строк и столбцов

Опр. Строки (столбцы) $x_1 \ldots x_k$ наз **линейно зависимыми**, если найдутся k чисел $\lambda_1 \ldots \lambda_k$, одновр не равных 0 и таких, что $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0$ ← нуль-строка или нуль-столбец

(нетривиальная лин комб $= 0$)

Опр. Строки (столбцы) наз **лин независимыми**, если равенство $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0$ возможно лишь при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

(лин комб $= 0$ т. и т.т., когда все $\lambda_i = 0$)

Теорема 1 Критерий линейной зависимости

Строки (столбцы) $x_1 \ldots x_k$ линейно зависимы т. и т.т., когда хотя бы одна строка (столбец) явл лин комбинацией остальных.

Док-во:

1. необходимость

Если строки (столбцы) $x_1 \ldots x_k$ лин зависимы, то сущ. $\lambda_1 .. \lambda_k$ не все равные 0 такие, что $\lambda_1 x_1 + .. + \lambda_k x_k = 0$.

Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $x_1 = \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}\right) x_2 + .. + \left(\frac{-\lambda_k}{\lambda_1}\right) x_k$, т.е. строка (столбец) x_1 – лин комб остальных.

② достаточность

Пусть, например, x_1 – лин комб остальных, т.е. $x_1 = \lambda_2 x_2 + .. + \lambda_k x_k$.
Тогда $1 \cdot x_1 - \lambda_2 x_2 - .. - \lambda_k x_k = 0$.

Теорема 2

Пусть строки (столбцы) $x_1 .. x_k$ лин нез.
Строка (столбец) y лин выражается из $x_1 .. x_k$ т и тт, когда $x_1 .. x_k$, y – лин зависимы.

Док-во:

Если y лин выражается из $x_1 .. x_k$, то система $x_1 .. x_k, y$ – лин з (теорема 1)
Обратно. Пусть $\alpha_1 x_1 + .. + \alpha_k x_k + \beta y = 0$, не все к-ты $= 0$.
Тогда $\beta \neq 0$ (иначе $x_1 .. x_k$ лин зав)

$\Rightarrow y = -\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 - .. - \frac{\alpha_k}{\beta} x_k$

Теорема 3

Пусть строка (столбец) y лин выражается из $x_1 .. x_k$.
Это выражается единственно т и тт, когда $x_1 .. x_k$ лин нез.

Док-во:

$y = \lambda_1 x_1 + .. + \lambda_k x_k = \mu_1 x_1 + .. + \mu_k x_k$

Тогда $(\lambda_1 - \mu_1) x_1 + .. + (\lambda_k - \mu_k) x_k = 0$

т.е. $x_1 .. x_k$ лин зав.

2) Обратно. Пусть $\exists \mu_1 .. \mu_k$ не все $= 0$ $\mu_1 x_1 + .. + \mu_k x_k = 0$.
Тогда если $y = \lambda_1 x_1 + .. + \lambda_k x_k$, то также $y = (\lambda_1 + \mu_1) x_1 + .. + (\lambda_k + \mu_k) x_k$ – другое выражение из $x_1 .. x_k$.

§2. Базис. Размерность пространства строк (столбцов)

Пусть V – лин. оболочка нек. строк (столбцов) в $\mathbb{R}^n$, $V \neq 0$.

Опр. Система векторов $x_1 .. x_n$ из V наз базисом, если она 1) линейно независима
2) ее линейная оболочка совпадает с V

(максимально лин нез подсистема):

Пример

① $x_1 = (1\ 2\ 3)$
$x_2 = (1\ 3\ 5)$
$x_3 = (2\ 4\ 6)$
$x_4 = (3\ 6\ 9)$

$V = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$:

② Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$

$e_1 = (1\ 0\ 0)$
$e_2 = (0, 1, 0.)$
$e_n = (0, 0.. 1)$

$x = (x_1 .. x_n) = x_1 e_1 + .. + x_n e_n$

Лемма

Пусть $V = \langle x_1 .. x_r \rangle$. $x_1 .. x_r$ – базис V.
И пусть $y_1, y_2 .. y_s$ – лин нез система векторов из V.
Тогда $s \leq r$

Док-во:

$y_1 \dots y_s \in V \Rightarrow$ явл лин комб базисных векторов.

$y_1 = a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{r1} x_r$

$y_2 = a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{r2} x_r$

$y_3 = a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + \dots + a_{r3} x_r$

Составим лин комб y_i с коэф-ми x_j

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_s y_s = x_1(a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{r1} x_r) + x_2(a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{r2} x_r) + \vdots + x_s(a_{1s} x_1 + a_{2s} x_2 + \dots + a_{sr} x_r) =$$

$$= (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1s} x_s) x_1 + (a_{21} x_1 + \dots) x_2 + \dots$$

и решим СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1s} x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rs} x_s = 0 \end{cases}$$

Если $s > r$, то эта система имеет ненулевое реш-е.

(x_1^0, x_s^0)

Тогда имеем нетривиальную лин зав. $x_1^0 y_1 + \dots + x_s^0 y_s = 0$.
Это противоречит условию теоремы.

Теорема 1 (о сущ-и базиса)

Пусть V - лин оболочка конеч числа строк (столбцов).
у V имеется базис.

Док-во:

Пусть $V = \langle x_1 \dots x_k \rangle$
Если мн-во $x_1 \dots x_k$ лин нз, то это и есть базис.
Если лин зав, то в этом мн-ве найдется вектор, лин выражающийся ч/з остальные. (например x_k)
Выкидываем этот вектор. Линейная оболочка не изменится $V = \langle x_1 \dots x_{k-1} \rangle$ и тд
В итоге получим лин нз систему, порождающую V, т.е. базис V.

Теорема 2

Пусть $V = \langle x_1 \dots x_k \rangle$
Все базисы V содержат одно и то же число векторов.
Это число наз размерностью V.

Обозначение: $\boxed{\dim V \text{ размерность}}$

Док-во: Если бы было 2 базиса с разным кол-вом векторов, то базис с большим кол-м векторов был бы лин зав.

Теорема 3 (о дополнении до базиса)

Пусть V - лин оболочка нек строк (столбцов).
Всякую лин нз систему строк (столбцов) можно дополнить до базиса.

Док-во:

Если $\langle x_1 \dots x_k \rangle \neq V$, то берем $x_{k+1} \in \langle x_1 \dots x_k \rangle$
Если $\langle x_1 \dots x_k, x_{k+1} \rangle = V$, то получим базис.
$\neq V$, то продолжаем

§3. Ранг матриц. Теорема Кронекера – Капелли.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ранги столбцы

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Их лин оболочка $\underset{\text{вертик.}}{V_B} = \langle A^1, A^2 \dots A^n \rangle$

Ранги строки

$A_1 = (a_{11} \dots a_{1n})$

$A_2 = (a_{21} \dots a_{2n})$

$A_m = (a_{m1} \dots a_{mn})$

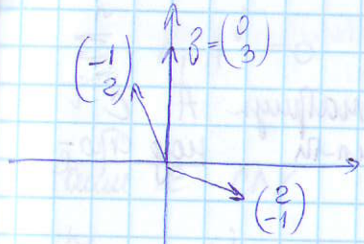
Их лин оболочка $\underset{\text{гориз.}}{V_Г} = \langle A_1 \dots A_m \rangle$

Новый взгляд на СЛУ

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

линейная комб столбцов с к-ми x и y.



$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Новый взгляд $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

? Принадлежит ли B пространству V_B ?
т.е. явл ли B лин комб $A^1 \dots A^n$?

$\sim B = x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n$

$$\sim x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\sim$ СЛУ (наша)

Ранг матриц

Размерность пространства столбцов V_B есть $\Gamma K_B(A)$

Размерность пространства строк $V_Г$ есть $\Gamma K_Г(A)$

$\dim V_B = \Gamma K_B(A)$ ранг по столбцам

$\dim V_Г = \Gamma K_Г(A)$ ранг по строкам

Элементарные пр-я матриц строк R_1, R_2, R_3

Лемма

Если матрица A' получена из матрицы A с помощью эл. преобр. конеч. посл-ти над строками

а) $rk_г(A') = rk_г(A)$

б) $rk_в(A') = rk_в(A)$

Док-во:

а) эл-е пр-я $R_3: A_s \leftrightarrow A_t$

$\langle A_1 .. A_s .. A_t .. A_m \rangle = \langle A_1 .. A_t .. A_s .. A_m \rangle$

лин оболочка не изм

$R_2: A_s' = A_s + \lambda A_t$

$\langle A_1 .. A_s + \lambda A_t .. A_t .. A_m \rangle = \langle A_1 .. A_s .. A_t .. A_m \rangle$

$R_1: \ ...$

Пространство не меняется.

б) Покажем, что эл пр-я строк сохраняют лин зависимости м/у столбцами.

Пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Линейная зависимость сохранилась.

$\Rightarrow$ размерность сохр

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j A^j = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A'^j = 0$$

Рассм 2 СЛУ

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A^j = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j A'^j = 0$$

они эквивалентны, т.е. решения первой и второй совпадают.

Теорема

Ранги по строкам и столбцам равны: $\boxed{rk_в(A) = rk_г(A) = rk\, A}$ ранг матрицы A

Док-во:

Пусть A' - ступенчатый вид матрицы. По лемме $rk_в(A) = rk_в(A')$, $rk_г(A) = rk_г(A')$

Проверим равенство $rk_в(A') = rk_г(A')$

Строки $A_1 .. A_r$ - лин нез.

[Упр $\lambda_1 A_1 + .. + \lambda_r A_r = (0 .. 0)$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0$ и т.д. $\quad 0, 0 .. \lambda_1 a_{1j_1} \ ...$]

$\Rightarrow rk_г(A') = r$

$A^{j_1} .. A^{j_r}$ - базисные столбцы. Они лин. нез.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1j_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{1j_2} \\ a_{2j_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + .. + \lambda_r \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ a_{rj_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_r = 0 \text{ и т.д.}$$

$\Rightarrow rk \langle A^{j_1} .. A^{j_r} \rangle = r \Rightarrow rk_в(A') \geq r$

С другой стороны любой столбец матрицы A' имеет вид $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ можно отождествить с $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \end{pmatrix}$

$= rk_B(A') \leq r$

Число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы ранг.

Следствие

Кол-во главных переменных не зависит от способа приведения матрицы к ступенчатому виду.

Теорема Кронекера-Капелли

СЛУ совместна т.и т.т., когда ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы

Док-во:

$AX = B$ СЛУ совместна $\Leftrightarrow B \in \langle A^1 .. A^n \rangle$

$x_1 A^1 + .. + x_n A^n = B$

Если совместна, то $B \in \langle A^1 .. A^n \rangle = rk \langle A^1 .. A^n \rangle = rk \{A^1 .. A^n, B\}$

Обратно, если $rk A = rk (A|B)$ и $A^{i_1} .. A^{i_r}$ - базис $\langle A^1 .. A^n \rangle$, то система $\{A^1 .. A^n, B\}$ линейно зависима.

$\Rightarrow$ B - лин комб базисных столбцов

$\Rightarrow$ тем более всех

т.е. есть решение

§4 Фундаментальная система решений СЛУ (ФСР СЛУ)

Рассм однородную СЛУ, т.е. с нулевой правой частью.

$\boxed{AX = 0}$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ - решения однор. сист. $AX = 0$

Тогда их линейная комбинация тоже решение $\alpha X + \beta Y$

$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = 0$ поэтому можно говорить о пространстве решений $V_A = \langle X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0 \rangle$

Пусть $S = \dim V_A$, $r = \operatorname{rang} A$

Теорема $\boxed{r + S = n}$

Размерность пространства решений равна $n - r$, где n - число неизвестных, r - ранг матрицы.

Док-во:

Пространство столбцов матрицы A $V_B(A) = \langle A^1 .. A^n \rangle$ - линейная оболочка столбцов $A^1 .. A^n$ $V_B(A) = \langle A^1 .. A^n \rangle = \langle x_1 A^1 + .. + x_n A^n \rangle$

$\dim V_B(A) = r$

Заметим $V_B(A) = \langle AX \mid X \in \mathbb{R}^n \rangle$ мн-во всех векторов вида $AX = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$

Пусть $X^1 .. X^S$ - базис пространства решений V_A

Дополним его до базиса $\mathbb{R}^n$: $X^1 .. X^S, X^{S+1} .. X^n$

Очевидно $\langle AX \mid X \in \mathbb{R}^n \rangle = \langle AX^{S+1} .. AX^n \rangle$

Действительно $X = \alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2 + .. + \alpha_S X^S + \alpha_{S+1} X^{S+1} + .. + \alpha_n X^n$

$AX = \underset{0}{\alpha_1 AX^1} + .. + ..$

Векторы $AX^{s+1} \dots AX^{n}$ лин нез

Пусть $\lambda_1 AX^{s+1} + \dots + \lambda_{n-s} AX^{n} = 0$

$\Rightarrow A(\lambda_1 X^{s+1} + \dots + \lambda_{n-s} X^{n}) = 0$

т. е. $\lambda_1 X^{s+1} + \dots + \lambda_{n-s} X^{n} \in V_A \Rightarrow$ все $\lambda_i = 0$ (?)

Значит, $r = n - s$

Опр. Базис пространства решений однородной СЛУ наз фундаментальной системой решений. (ФСР)

Базисов много. Стандартный способ нахождения ФСР:

Приведем матрицу к ступенчатому виду. Пусть переменные $x_1 \dots x_r$ – главные

$x_1 = c_{1,r+1} x_{r+1} + \dots + c_{1,n} x_n$

$\vdots$

$x_r = c_{r,r+1} x_{r+1} + \dots + c_{r,n} x_n$

Будем придавать свободным неизвестным значения

$$\left(\begin{matrix} x_{r+1} = 1 \\ x_{r+2} = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{matrix}\right) \quad \left(\begin{matrix} x_{r+1} = 0 \\ x_{r+2} = 1 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{matrix}\right) \quad \dots \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получим $n - r$ решений

$$X^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad X^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_r^2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad X^{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ \vdots \\ x_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ясно, что $X^1 \dots X^{n-r}$ лин нез. Их равно $n-r \Rightarrow$ это ФСР

Любое решение СЛУ $AX = 0$ $X = \mathcal{L}_1 X^1 + \dots + \mathcal{L}_{n-r} X^{n-r}$

Неоднородная система $\boxed{AX = B}$

Пусть X_0 – частное решение $AX_0 = B$.
$X_1 \dots X_m$ – ФСР $AX = 0$

Общее решение неодн сист $X = X_0 + c_1 X_1 + \dots + c_m X_m$

Глава 7. Определители и обратные матрицы

§1. Определители n-го порядка

Опр. Всякое расположение чисел $1, 2 \dots n$ в некотором порядке наз перестановкой из n-чисел.

Обозначение $\boxed{\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \dots \mathcal{L}_n)}$

Из n чисел можно образовать $n!$ перестановок

Опр. Два числа $\mathcal{L}_i$ и $\mathcal{L}_j$ в перестановке образуют инверсию, если $i > j$, но $\mathcal{L}_i < \mathcal{L}_j$

Пример $\mathcal{L} = (3, 2, 1)$ нечетная перестановка

подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Общее кол-во инверсий в перестановке обозначается $|\mathcal{L}|$

Опр. Перестановка наз четной, если $|\mathcal{L}|$ – четное число, нечетной, если $|\mathcal{L}|$ – нечетное число.